Programme de colle n°29

semaine du 3 au 7 juin

Notions vues en cours

Chapitre 33 : Dénombrement *(même programme que celui de la semaine précédente)*
(Des exercices sur ce chapitre pourront être posés en colle)

Chapitre 34 : Variables aléatoires

- Univers (supposé fini en MPSI), événement, événement élémentaire, issue (ou résultat) d'une expérience aléatoire, événements disjoints (ou incompatibles), système complet d'événement (S.C.E.)
- Probabilité sur un univers (notée généralement $\mathbb{P}$) : définition, propriétés classiques telles que $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1-\mathbb{P}(A)$, etc. Si on dispose d'un S.C.E. $(B_i)_{1\leq i\leq n}$, on peut exprimer $\mathbb{P}(A)$ en fonction des probabilités $\mathbb{P}(A\cap B_i)$
- Distribution de probabilités : définition, permet de construire une probabilité ; réciproquement, la famille $(\,\mathbb{P}(\{\omega\})\,)_{\omega\in\Omega}$ est une distribution de probabilités
- Variable aléatoire (réelle, complexe) : définition, abréviations v.a. et v.a.r., exemple avec la v.a.r. $\mathbf{1}_A$
- Notation $\{X\in A\}$, ou $(X\in A)$, notation $\mathbb{P}(X\in A)$, et plus généralement $\{X \text{ vérifie } \mathfrak{P}\}$ avec $\mathfrak{P}$ une propriété que doit vérifier $X(\omega)$: par exemple $\{X\in 2\mathbb{N}\}$ et $\mathbb{P}(X\leq x)$
- Si A, B sont disjoints, alors $\mathbb{P}(X\in A\cup B) = \mathbb{P}(X\in A)+\mathbb{P}(X\in B)$
- Opérations sur les v.a. : avec $E\subset\mathbb{K}$ la somme / produit / multiplication par un scalaire, avec E quelconque la composition, notation $f(X)$
- Loi d'une v.a. X, notation $\mathbb{P}_X$ ou encore $\mathbb{P}(X\in\cdot\,)$, c'est une probabilité sur E (donc en particulier vérifie les propriétés de toute probabilité)
- Notation $\mathbb{P}(X=x)$, la famille $(\mathbb{P}(X=x))_{x\in E}$ est une densité de probabilités et détermine entièrement la loi $\mathbb{P}_X$
- Loi uniforme sur E, notation $X\sim\mathcal{U}(E)$, loi de Bernoulli, notation $X\sim\mathcal{B}(p)$, loi binomiale, notation $X\sim\mathcal{B}(n,p)$
- $X\sim Y$ signifie que X, Y ont la même loi : c'est une relation d'équivalence, loi de $f(X)$

Chapitre 35 : Indépendance, conditionnement *(mais uniquement conditionnement cette semaine)*

- Probabilité de A sachant B, notation $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A\mid B)$, $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur Ω
- Formule des probabilités composées (avec 2 / n événements), convention $\mathbb{P}(A\mid B)\mathbb{P}(B) = 0$ si $\mathbb{P}(B) = 0$. Formule des probabilités totales, formule de Bayes
- Loi conditionnelle d'une variable X sachant un événement B, notation $\mathbb{P}(X\in\cdot\mid B)$, il s'agit d'une probabilité (donc hérite des propriétés classiques), adaptation de la formule des probabilités totales avec les événements $A = \{X=x\}$ et le système complet d'événements $(\{Y=y\})_{y\in F}$

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **32 à 34**. *Des exemples de questions figurent ci-après.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Définition d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω, puis pour toute v.a. X, définition des évènements $\{X \in A\}$ et $\{X = x\}$, définition de la loi de X (sans démonstration), expliquer pourquoi la connaissance de $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout x permet de déterminer complètement la loi de X (sans démonstration) Chapitre 34, Définition 34.5, puis notation de la section 2.2, puis Propriété 34.16 et enfin Propriété 34.17 item 7
2. Donner les trois lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale). Pour chaque loi, on précisera (sans démonstration) l'ensemble dans lequel la v.a. prend ses valeurs, la notation correspondante (avec un $\sim$), ainsi que les valeurs de $\mathbb{P}(X = x)$ Chapitre 34, Définitions 34.18, 34.19, 34.20
3. Définition d'un système complet d'évènement ; définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B ; **sans démonstration** : formule des probabilités composées, des probabilités totales, et formule de Bayes Chapitre 34, Définition 34.4, puis Chapitre 35, Propriétés 35.4, 35.5, 35.6

Exemples de questions libres :

Chapitre 32 :

- Compléter : "Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que ..."
- Compléter : "Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que ..."
- Soit f une fonction continue. Sous quelles conditions sur α et β est-ce que la fonction $\varphi : x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ est dérivable ? Donner l'expression de $\varphi'(x)$.
- Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- Rappeler la définition d'une fonction uniformément continue en termes de quantificateurs.

Chapitre 33 :

- On pose $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$. Combien y a-t-il d'applications de E dans F ? Et de F dans E ?
- On pose $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Combien y a-t-il de sous-ensembles de E ?
- Donner (éventuellement oralement) la définition d'un p-arrangement de E ; si $\text{card}(E) = n$, combien y a-t-il de p-arrangements de E ?
- Si E est de cardinal n, combien y a-t-il de permutations de E ?
- Donner (éventuellement oralement) la définition d'une p-combinaison de E ; si $\text{card}(E) = n$, combien y a-t-il de p-combinaisons de E ?

Chapitre 34 :

- Donner 4 propriétés d'une probabilité : ou bien qui font partie de la définition, ou bien qui se déduisent directement de la définition (sans hypothèse supplémentaire)
- Qu'appelle-t-on une distribution de probabilités sur un univers Ω ?
- Soit X, Y deux v.a. définies sur un même ensemble Ω. Donner la définition ou une caractérisation de l'assertion "X et Y suivent la même loi"
- Si X suit une loi uniforme sur un ensemble E fini, quelles sont les valeurs que peut prendre X ? Quelle est la loi de X ?
- Si X suit une loi binomiale de paramètre (n, p), quelles sont les valeurs que peut prendre X ? Quelle est la loi de X ?